



第九章 解三角形

9.1 正弦定理与余弦定理

9.1.1 正弦定理

易错记

1-1. C 【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

得 $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $a <$

b , 所以 $A < B$,

所以 A 为锐角, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$.

故选 C.

题型诀

1-1. B 【解析】易知 $A = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$,

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

所以 $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 2$.

1-2. $\frac{42}{13}$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\cos A =$

$\frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{5}{13}$, 得 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} =$

$\frac{3}{5}$, $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{12}{13}$,

则 $\sin C = \sin(A+B)$

$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{63}{65}$,

由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{10}{3}$, 所以 $c =$

$\frac{10}{3} \times \frac{63}{65} = \frac{42}{13}$.

2-1. D 【解析】 $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \therefore \sin A =$

$\frac{a \sin C}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\because a > c, \therefore A > C$,

$\therefore A = 45^\circ$ 或 135° ,

故选 D.



2-2. B 【解析】 $\sin B = \sin(A + C) =$

$$\sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

$$\therefore \sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0,$$

$$\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0,$$

$$\therefore \cos A \sin C + \sin A \sin C = 0.$$

$$\therefore \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = -\sin A,$$

$$\therefore \tan A = -1.$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < A < \pi,$$

$$\therefore A = \frac{3\pi}{4}.$$

由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$

$$\therefore a = 2, c = \sqrt{2},$$

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a > c, \therefore C = \frac{\pi}{6}, \text{ 故选 B.}$$

3-1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】 $a^2 \sin C = 2 \sin A,$

由正弦定理得 $a^2 c = 2a,$

所以 $ac = 2.$

$$(a+c)^2 = 6 + b^2 \text{ 可化为 } a^2 + c^2 - b^2 = 6 - 2ac = 2,$$

代入“三斜求积”公式得 $S_{\triangle ABC} =$

$$\sqrt{\frac{1}{4} \times \left[2^2 - \left(\frac{2}{2} \right)^2 \right]} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4-1. B 【解析】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} =$

$$\frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin B}, \text{ 所以 } \sin B = \frac{1}{3}. \text{ 因为}$$

$$a > b, \text{ 所以 } A > B, \text{ 又 } A = \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } B \text{ 为锐}$$

角, 则满足条件的三角形只有 1 个, 故选 B.

4-2. BC 【解析】对于 A, 因为 $a < b$, 所以 $A < B$. 因为 $A = 150^\circ$, 所以 $150^\circ < B$, 所以这样的三角形不存在, 即 $\triangle ABC$ 无解, 所以 A 错误.

对于 B, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$ 即

$$\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\sin B}, \text{ 得 } \sin B = 2 > 1, \text{ 无解, 所以}$$



B 正确.

对于 C, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}, \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 因为 } 45^\circ <$$

$B < 135^\circ$, 所以 $B = 60^\circ$ 或 $B = 120^\circ$, 所以

$\triangle ABC$ 有两解, 所以 C 正确.

对于 D, 因为 $A = 60^\circ$, $a = b = 2$, 所以

$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 所以

$\triangle ABC$ 有一解, 所以 D 错误.

故选 BC.

5-1. B 【解析】由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\cos A} =$

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C},$$

则 $\tan A = \tan B = \tan C$.

又 A, B, C 为三角形内角,

则 $A = B = C$,

则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

故选 B.

5-2. 等腰直角 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $b =$

$$\sqrt{2}a, B = 2A,$$

所以 $\sin B = \sin 2A$,

即 $\sin B = 2\sin A \cos A$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

则 $b = 2a \cos A$.

$$\text{又 } b = \sqrt{2}a, \text{ 所以 } \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{4},$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

6-1. B 【解析】在锐角三角形 ABC 中,

$$\because c = b(1 + 2\cos A),$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } \sin C = \sin B(1 + 2\cos A),$$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin B + 2\cos A \sin B,$$

$$\therefore \sin(A-B) = \sin B,$$

解得 $A-B=B$ 或 $A-B+B=\pi$ (舍去),

$$\therefore A=2B,$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2\sin B \cos B}{\sin B} = 2\cos B.$$

$$\because A+B+C=3B+C=\pi, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$



$$\therefore 3B > \frac{\pi}{2}. \text{ 又 } \because A = 2B < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}, \therefore \sqrt{2} < 2\cos B < \sqrt{3},$$

即 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

故选 B.

6-2. 【解】 (1) 由 $m \parallel n$ 得 $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C - b - c = 0$,

由正弦定理得 $\sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C - \sin B - \sin C = 0$,

因为 $\sin B = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C$,

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C - \cos A\sin C - \sin C = 0$.

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C \neq 0$,

所以 $\sqrt{3}\sin A - \cos A = 1$,

即 $2\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

所以 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $a = 4, A = \frac{\pi}{3}$, 所以由正弦定理得

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}, b =$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin B, c = \frac{8\sqrt{3}}{3}\sin C,$$

$$b+c = \frac{8\sqrt{3}}{3}(\sin B + \sin C) = \frac{8\sqrt{3}}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right) + \sin C\right] = \frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C + \frac{3}{2}\sin C\right) = 8\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right).$$

因为 $C \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$,

所以 $C + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

所以 $8\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) \in (4, 8]$,

所以 $b+c$ 的取值范围是 $(4, 8]$.

7-1. D 【解析】 因为 $a\cos B - b\cos A = \frac{c}{2}$, 所以 $2\sin A\cos B - 2\sin B\cos A = \sin C$,



$$2\sin A \cos B - 2\sin B \cos A = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\text{得 } \sin A \cos B - 3\sin B \cos A = 0,$$

$$\text{即 } \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{3\cos A}{\cos B}.$$

$$\text{因为 } \frac{a\cos A + b\cos B}{a\cos B} = \frac{\cos A}{\cos B} + \frac{b}{a} = \frac{\cos A}{\cos B} +$$

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\cos A}{\cos B} + \frac{\cos B}{3\cos A} \geq 2\sqrt{\frac{\cos A}{\cos B} \cdot \frac{\cos B}{3\cos A}} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\cos B}{3\cos A}, \text{ 即 } \cos B =$$

$$\sqrt{3}\cos A \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{所以 } \frac{a\cos A + b\cos B}{a\cos B} \text{ 的最小值为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ 故}$$

选 D.

7-2. 【解】 (1) 由题意知, $2\sin C \cos A +$

$$\sin A \cos C - \cos A \sin C + \sqrt{3} \cos B = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sqrt{3} \cos B = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \sin B + \sqrt{3} \cos B = \sqrt{3}, \text{ 得 } 2\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \text{ 所以 } \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{又 } B + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), \text{ 所以 } B + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{AD}{\sin B} =$$

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD}, \text{ 解得 } \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以}$$

$$\cos \angle BAD = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\sin \angle BAC = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos \angle BAC = 2 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \cos C = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \angle BAC\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6}-1}{6}.$$

巩固练

1. C 【解析】 由三角形内角和定理得

$$A = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ, \text{ 根据正弦定}$$

$$\text{理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 又 } a = 8, \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2},$$



$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{6}. \text{ 故}$$

选 C.

2. **A** 【解析】解方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$, 得

$$x = -\frac{3}{5} \text{ 或 } x = 2 \text{ (舍去)}. \text{ 设三角形边长为}$$

$$3, 5 \text{ 的两边的夹角为 } \alpha, \text{ 则 } \cos \alpha = -\frac{3}{5},$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \therefore \text{ 该三角形的面积 } S = \frac{1}{2} \times$$

$$3 \times 5 \times \frac{4}{5} = 6.$$

3. **C** 【解析】由正弦定理, 得 $\frac{b}{\sin B} =$

$$\frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{1}{2} <$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin B.$$

因为 $c < b$, 所以 $C < B$, 所以 C 为锐角,
故满足条件的 $\triangle ABC$ 只有一个.

故选 C.

4. **B** 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $a - 2c \cos B = 0$, 由正弦定理可知,

$$\sin A - 2 \sin C \cos B = 0,$$

$$\text{所以 } \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cdot \cos B = 2 \sin C \cos B,$$

$$\text{整理得, } \sin B \cos C = \sin C \cos B,$$

$$\text{即 } \sin C \cos B - \sin B \cos C = \sin(C - B) = 0,$$

$$\text{所以 } C - B = 0 \text{ 或 } C - B = \pi \text{ (舍去)},$$

$$\text{所以 } B = C,$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

故选 B.

5. **B** 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $A : B : C = 1 : 2 : 3$,

$$\text{所以 } A = 30^\circ, B = 60^\circ, C = 90^\circ,$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{1}{2}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin C = 1,$$

$$\text{由正弦定理可得 } a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : 2, \text{ 故选 B.}$$

6. **A** 【解析】方法一: 因为 $8b = 5c, C = 2B$,

$$\text{所以 } 8 \sin B = 5 \sin C = 5 \sin 2B =$$

$$10 \sin B \cos B, \text{ 所以 } \cos B = \frac{4}{5}. \text{ 又因为}$$



B 为三角形内角, 所以 $\sin B =$

$$\sqrt{1-\cos^2 B} = \frac{3}{5}. \text{ 所以 } \sin C = \sin 2B = 2 \times$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}. \text{ 又因为 } \cos B > \cos 45^\circ, \text{ 所}$$

以 $B < 45^\circ, C = 2B < 90^\circ, \cos C =$

$$\sqrt{1-\sin^2 C} = \frac{7}{25}.$$

方法二: 因为 $8b = 5c$, 所以 $8\sin B =$

$$5\sin C, \text{ 即 } \sin B = \frac{5}{8}\sin C. \text{ 因为 } C = 2B,$$

所以 $\cos C = \cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = 1 -$

$$2\left(\frac{5}{8}\sin C\right)^2, \text{ 即 } 25\cos^2 C - 32\cos C +$$

$$7 = 0. \text{ 解得 } \cos C = \frac{7}{25} \text{ 或 } \cos C = 1 \text{ (舍$$

去). 故选 A.

7. **C** 【解析】已知 $c(1 + \cos A) =$

$\sqrt{3}a\sin C$, 由正弦定理可得 $\sin C \cdot (1 +$

$$\cos A) = \sqrt{3}\sin A \cdot \sin C. \because \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \sqrt{3}\sin A - \cos A = 1,$$

$$\text{即 } 2\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

$$\because 0 < A < \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } A -$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\because b = 2, \therefore \text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 有}$$

$$c = \frac{b\sin C}{\sin B} = \frac{b\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin B} =$$

$$\frac{\sin B + \sqrt{3}\cos B}{\sin B} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan B}.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\therefore \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} < B + \frac{\pi}{3} < \pi, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \tan B > \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 则 } 1 < c < 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}c \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\right.$$

$$2\sqrt{3}\left.\right). \text{ 故选 C.}$$

8. **C** 【解析】依题意, $a\cos B - b\cos 2A =$

c , 由正弦定理得 $\sin A\cos B -$



$$\begin{aligned}\sin B(2\cos^2 A - 1) &= \sin C, \sin A \cos B - \\ \sin B(2\cos^2 A - 1) &= \sin(A + B), \\ \sin A \cos B - \sin B(2\cos^2 A - 1) &= \\ \sin A \cos B + \cos A \sin B, -\sin B(2\cos^2 A - 1) &= \cos A \sin B,\end{aligned}$$

由于 $0 < B < \pi$, $\sin B > 0$,

$$\text{所以 } 2\cos^2 A + \cos A - 1 = 0,$$

$$(2\cos A - 1)(\cos A + 1) = 0,$$

由于 $0 < A < \pi$, 所以 $\cos A + 1 \neq 0$, 所以

$$2\cos A - 1 = 0, \cos A = \frac{1}{2} > 0, \text{ 所以 } A =$$

$$\frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times 2 = 4, a = 4 \times$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\frac{a^2}{b+c} = \frac{2\sqrt{3}\sin A}{\sin B + \sin C} = 3 \times \frac{1}{\sin B + \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$3 \times \frac{1}{\frac{3}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B + \frac{1}{2}\cos B} = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)},$$

由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以

$$\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{即 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{3} <$$

$$B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \text{ 所}$$

$$\text{以 } 1 \leq \frac{1}{\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)} < \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \leq \sqrt{3} \times$$

$$\frac{1}{\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)} < 2,$$

所以 $\frac{a^2}{b+c}$ 的取值范围是 $[\sqrt{3}, 2)$.

9. -3 【解析】 $\because (2a - c) \cos B = b \cos C,$

由正弦定理得 $(2\sin A - \sin C) \cos B =$

$$\sin B \cos C,$$

$$2\sin A \cos B = \sin B \cos C + \sin C \cos B,$$

$$2\sin A \cos B = \sin(B + C) = \sin A,$$

$$\because \sin A \neq 0,$$



$$\therefore \cos B = \frac{1}{2},$$

又 $0^\circ < B < 180^\circ$, $\therefore B = 60^\circ$.

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{BC} = -|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cos B = -3 \times 2 \times \frac{1}{2} = -3.$$

10. ABC 【解析】由正弦定理得 $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{x}{\sin B}, \text{ 则 } x = 2\sqrt{2} \sin B, \text{ 又 } B \in$$

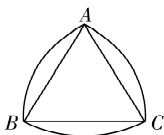
$(0, \frac{3\pi}{4})$, 且满足条件的三角形只有一个, 即 x 有唯一的角与其对应, 所

以 $B \in \{\frac{\pi}{2}\} \cup (0, \frac{\pi}{4}]$, 故 $x =$

$2\sqrt{2} \sin B \in \{2\sqrt{2}\} \cup (0, 2]$. 故选 ABC.

11. $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$ 【解析】如

图. 由条件可知,



$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{AC} = \frac{\pi}{3},$$

等边三角形的边长 $AB = BC = AC =$

$$\frac{\pi}{3} = 1, \text{ 则以点 } A, B, C \text{ 为圆心, 弧}$$

AB, BC, AC 所对的扇形面积为 $\frac{1}{2} \times$

$$\frac{\pi}{3} \times 1 = \frac{\pi}{6}, \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \cdot$$

$$AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$, 所以莱洛三角形的面积是 $3 \times$

$$\frac{\pi}{6} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}.$$

9.1.2 余弦定理

易错记

1-1. C 【解析】①当 C 是钝角时, 有 $C >$

90° , 由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$,

$$\therefore c > \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}.$$

又 $a + b > c$, $\therefore c < 1 + 2 = 3$, \therefore 可得 c 的取值范围是 $(\sqrt{5}, 3)$.



②当 B 是钝角时,有 $B > 90^\circ$,由余弦定理得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < 0,$$

$\therefore b^2 > a^2 + c^2$, 可得 $4 > 1 + c^2$, 解得 $c < \sqrt{3}$.

又 $c > b - a = 1$, $\therefore 1 < c < \sqrt{3}$.

综上, c 的取值范围是 $(1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}, 3)$.

题型诀

1-1. C 【解析】因为 $a = 3, b = \sqrt{13}, c = 4$,

所以由余弦定理得, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$

$$\frac{9 + 16 - 13}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2},$$

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$, 故选 C.

1-2. B 【解析】因为 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$, 所以边长为 $\sqrt{5}$ 的边所对的

角最大, 其余弦值为 $\frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 1 \times \sqrt{2}} =$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以最大内角的度数是 135° , 故

选 B.

2-1. B 【解析】 $\because a : b : c = 3 : 5 : 7$,

设 $a = 3x, b = 5x, c = 7x, x > 0$,

$\therefore c$ 最大, 即 C 最大, $\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$

$$\frac{9x^2 + 25x^2 - 49x^2}{30x^2} = -\frac{1}{2},$$

又 $0^\circ < C < 180^\circ$, $\therefore C = 120^\circ$. 故选 B.

2-2. 【解】 $\because c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$, $\therefore [c^2 - (a^2 + b^2)]^2 - a^2b^2 = 0$, 则 $c^2 -$

$(a^2 + b^2) = \pm ab$, 故 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pm \frac{1}{2}$.

又 $\because 0^\circ < C < 180^\circ$, $\therefore C = 60^\circ$ 或 $C = 120^\circ$.

3-1. CD 【解析】因为 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, B \in$

$(0, \pi)$, 所以 $\cos B = \pm \frac{1}{2}$.

当 $\cos B = \frac{1}{2}$ 时, 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 -$

$2accos B$, 可知 $7^2 = c^2 + 3^2 - 6c \times \frac{1}{2}$, 整理可

得 $c^2 - 3c - 40 = 0$, 解得 $c = 8$ 或 $c = -5$ (舍去), 所以由余弦定理的推论可得 $\cos C =$

$$\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 3} = -\frac{1}{7};$$



当 $\cos B = -\frac{1}{2}$ 时, 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 -$

$2accos B$, 可知 $7^2 = c^2 + 3^2 - 6c \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 整

理可得 $c^2 + 3c - 40 = 0$, 解得 $c = 5$ 或 $c = -8$ (舍去), 所以由余弦定理的推论可得

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14}.$$

综上, $\cos C = -\frac{1}{7}$ 或 $\cos C = \frac{11}{14}$.

故选 CD.

3-2. $9\sqrt{3}+9$ 【解析】 已知 $b=9, a=2c$,

$B = \frac{\pi}{3}$, 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$,

即 $9^2 = 4c^2 + c^2 - 2 \cdot 2c \cdot c \cdot \cos \frac{\pi}{3}$, 化简得

$c^2 = 27$, 解得 $c = 3\sqrt{3}$ 或 $c = -3\sqrt{3}$ (负值舍去), 则 $a = 6\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c = 9\sqrt{3}+9$.

4-1. A 【解析】 由余弦定理可得 $c^2 =$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 12, \text{ 所以 } c = 2\sqrt{3}, \text{ 故选 A.}$$

4-2. 【解】 (1) 由 $2\cos(A+B) = 1$, 得

$2\cos(\pi-C) = 1$, 即 $\cos C = -\frac{1}{2}$, 故 $C = 120^\circ$.

(2) 因为 a, b 是方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ 的两根, 所以 $a+b = 2\sqrt{3}, ab = 2$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a+b)^2 - 2ab - 2ab \cos C \\ &= (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 - 2 \times 2 \times \cos 120^\circ \\ &= 10. \end{aligned}$$

所以 $AB = c = \sqrt{10}$.

5-1. A 【解析】 由 $2\cos B = \frac{a}{c}$ 及余弦定

理得 $2 \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} = \frac{a}{c}$, 整理得

$c^2 = b^2, \therefore b = c, \therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

5-2. C 【解析】 由余弦定理得 $\cos A =$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

由 $\sin B \sin C = \sin^2 A$, 可得 $a^2 = bc$,



代入 $b^2 + c^2 = a^2 + bc$,

则有 $(b-c)^2 = 0$, 所以 $b = c$,

又 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,

故选 C.

5-3. 【解】由正弦定理和余弦定理知,

$$\sin A = 2 \sin B \cos C \Rightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow$$

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow b = c.$$

$$\text{又 } (a+b+c)(b+c-a) = 3bc,$$

$$\text{所以 } (a+2b)(2b-a) = 3b^2, \text{ 得 } a^2 = b^2, \text{ 即 } a = b,$$

故 $a = b = c$, $\triangle ABC$ 为等边三角形.

6-1. C 【解析】在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理

$$\text{得 } \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \text{ 即 } \frac{2}{\sin \angle ADB} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{解得 } \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 所以 } \cos \angle CDB =$$

$$\sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle CDB =$

$$\frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD \cdot CD},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{4^2 + CD^2 - (\sqrt{22})^2}{2 \times 4 \times CD},$$

$$\text{解得 } CD = 3\sqrt{2} \text{ 或 } CD = -\sqrt{2} \text{ (舍)}.$$

故选 C.

7-1. $4\sqrt{3} + 8$ 【解析】由正弦定理结合

$$\sqrt{3} a \sin B = b(2 + \cos A), \text{ 可得 } \sqrt{3} \sin A \sin B = \sin B(2 + \cos A),$$

$$\text{因为 } \sin B \neq 0, \text{ 所以 } \sqrt{3} \sin A - \cos A =$$

$$2 \sin \left(A - \frac{\pi}{6} \right) = 2, \text{ 即 } \sin \left(A - \frac{\pi}{6} \right) = 1,$$

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}, \text{ 所以 } A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 解}$$

$$\text{得 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{若 } \triangle ABC \text{ 的面积等于 } 4\sqrt{3}, \text{ 则 } S_{\triangle ABC} =$$

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} bc = 4\sqrt{3}, \text{ 解得 } bc = 16, \text{ 在}$$

$$\triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 + 16,$$

$$\triangle ABC \text{ 的周长为 } a + b + c = \sqrt{b^2 + c^2 + 16} + b + c \geq \sqrt{2bc + 16} + 2\sqrt{bc} = 4\sqrt{3} + 8, \text{ 当且仅}$$



当 $b=c=4$ 时等号成立.

综上所述, 当且仅当 $\triangle ABC$ 是以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 为顶角的等腰三角形时, $\triangle ABC$ 的周长取到最小值, 且最小值为 $4\sqrt{3}+8$.

7-2. 【解】 (1) 由正弦定理得 $2\cos A \cdot (\sin B \cos C + \sin C \cos B) = \sqrt{3} \sin A$, 即 $2\cos A \sin(B+C) = 2\cos A \sin A = \sqrt{3} \sin A$.
 $\because \sin A \neq 0, \therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由 $A \in (0, \pi)$ 得 $A = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\because a=1, \triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{5}+1$,

$\therefore b+c=\sqrt{5}$, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc} = \frac{5-2bc-1}{2bc} =$

$\frac{2-bc}{bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore bc = \frac{4}{2+\sqrt{3}} = 8-4\sqrt{3}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times (8-4\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} = 2-\sqrt{3}$.

巩固练

1. A 【解析】 方程 $x^2-13x+40=0$ 的两实数根是 $x=5$ 或 $x=8$, 则 $a+b=13$, $ab=40$. 由余弦定理得 $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C = (BC+AC)^2 - 2AC \cdot BC(1+\cos C)$, 所以 $AB^2 = 13^2 - 2 \times 40 \times (1+\cos 60^\circ) = 49$, 则 $AB=7$ 或 $AB=-7$ (负值舍去), 故选 A.

2. B 【解析】 设 A 为 $\triangle ABC$ 的最小角, C 为 $\triangle ABC$ 的最大角,
 由余弦定理的推论, 可得 $\cos B = \frac{3^2+8^2-7^2}{2 \times 3 \times 8} = \frac{1}{2}$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$, 所以 $A+$

$C = \frac{2\pi}{3}$, 即最大角和最小角之和是

$\frac{2}{3}\pi$. 故选 B.

3. D 【解析】 \because 在 $\triangle ABC$ 中, $B=60^\circ$,

$b^2=ac, \therefore \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, \therefore a^2+$

$c^2-2ac=0$, 即 $(a-c)^2=0, \therefore a=c, A=C$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形. 故选 D.



4. **D** 【解析】因为 $b^2 + c^2 = a^2 + \sqrt{3}bc$, 所以

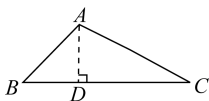
$$\text{由余弦定理可得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$\frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 又因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A =$$

$$\frac{\pi}{6}, \text{ 故选 D.}$$

5. **C** 【解析】方法

一: 如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点



D , 设 $BC = a$, 则 BC 边上的高 $AD =$

$$\frac{1}{3}a. \text{ 又 } \because B = \frac{\pi}{4}, \therefore BD = AD = \frac{1}{3}a, AB =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}a, DC = a - BD = \frac{2}{3}a, \therefore AC =$$

$$\sqrt{AD^2 + DC^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a. \text{ 由余弦定理得}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} =$$

$$\frac{\frac{2}{9}a^2 + \frac{5}{9}a^2 - a^2}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}a \times \frac{\sqrt{5}}{3}a} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

方法二: 如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D . 设 $AD = t$, 则 $BC = 3t$.

$$\because B = \frac{\pi}{4}, \therefore \angle BAD = \frac{\pi}{4}, BD = AD = t.$$

$$\therefore \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \angle BAD = \frac{\sqrt{2}}{2}, DC =$$

$$2t. \therefore AC = \sqrt{5}t.$$

$$\therefore \sin \angle DAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \cos(\angle BAD + \angle DAC) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

6. $\frac{3\sqrt{39}}{26}$ 【解析】由正弦定理得

$$\sin A \sin B \cos C + \sin C \sin B \cos A =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B. \because B \in (0, \pi), \sin B \neq 0,$$

$$\therefore \sin A \cos C + \sin C \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \sin(A +$$

$$C) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin B, \therefore B = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } B = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{又 } b > a > c, \therefore B = \frac{2\pi}{3}.$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 -$



$2ac \cdot \cos \angle ABC$, 得 $a^2 + a - 12 = 0$,

$\therefore a = 3$ 或 $a = -4$ (舍).

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin \angle ABC} =$

$\frac{a}{\sin A}$, 得 $\sin A = \frac{a \sin \angle ABC}{b} = \frac{3 \sqrt{39}}{26}$.

$\therefore BD = AB = 1, \therefore \angle ADB = A$,

$\therefore \sin \angle ADB = \frac{3 \sqrt{39}}{26}$.

7. 【解】(1) 因为 $\frac{a}{2 - \cos A} = \frac{b}{\cos B}$,

所以 $a \cos B = 2b - b \cos A$,

由正弦定理得 $\sin A \cos B + \sin B \cos A =$

$2 \sin B$, 即 $\sin(A + B) = 2 \sin B$, 所以

$\sin C = 2 \sin B$, 由正弦定理得 $\frac{c}{b} = 2$.

(2) 设 $\angle BAD = \angle CAD = \theta$,

因为 $\frac{BD}{DC} = \frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \theta}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \theta} =$

$\frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = 2$, $BD + DC = BC = 3$, 所以

$BD = 2, DC = 1$.

在 $\triangle ADB$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 =$
 $AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \theta$,

在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得 $DC^2 =$
 $AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \theta$,

将 $AD = 2\sqrt{2}, AB = c, AC = b, BD = 2,$
 $DC = 1$ 代入,

得 $\begin{cases} 4 = c^2 + 8 - 2c \cdot 2\sqrt{2} \cos \theta, \\ 1 = b^2 + 8 - 2b \cdot 2\sqrt{2} \cos \theta, \end{cases}$

即 $\begin{cases} c^2 - 4\sqrt{2}c \cos \theta = -4, \\ b^2 - 4\sqrt{2}b \cos \theta = -7. \end{cases}$

又因为 $\frac{c}{b} = 2$,

所以 $\begin{cases} 4b^2 - 8\sqrt{2}b \cos \theta = -4 \text{ ①}, \\ b^2 - 4\sqrt{2}b \cos \theta = -7 \text{ ②}, \end{cases}$

② $\times 4$ -①得 $\sqrt{2}b \cos \theta = 3$,

代入上式得 $c = 2\sqrt{5}, b = \sqrt{5}$,

所以 $\cos \angle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4}{5}$,

因为 $\angle BAC \in (0, \pi)$,

所以 $\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \frac{3}{5}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times$



$$2\sqrt{5} \times \frac{3}{5} = 3.$$

8. 【解】(1) 因为 $(a+b)(\sin A - \sin B) = (a-c)\sin C$,

由正弦定理可得 $(a+b)(a-b) = (a-c)c$, 即 $ac = a^2 + c^2 - b^2$,

又由余弦定理的推论得 $\cos B =$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, \text{ 且 } B \in (0, \pi), \text{ 所以}$$

$$B = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 方法一: 因为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $2\sqrt{3}$,

$$\text{由正弦定理得 } \frac{b}{\sin B} = 2\sqrt{3}, \text{ 则 } b = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,$$

$$\text{由余弦定理得 } 9 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac,$$

$$\text{因为 } 3ac = (a+c)^2 - 9 \leq 3 \times \frac{(a+c)^2}{4}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \frac{1}{4}(a+c)^2 \leq 9, \text{ 即 } a+c \leq 6,$$

由三角形的性质知 $3 < a+c \leq 6$, 当且仅当 $a=c=3$ 时, 等号成立,

所以 $6 < a+b+c \leq 9$, 故 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(6, 9]$.

方法二: 因为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $2\sqrt{3}$,

$$\text{由正弦定理得 } \frac{b}{\sin B} = 2\sqrt{3} = \frac{a}{\sin A} =$$

$$\frac{c}{\sin C}, \text{ 则 } b = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,$$

$$a+b+c = 3 + 2\sqrt{3}\sin A + 2\sqrt{3}\sin C$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} \left[\sin A + \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} \left(\sin A + \frac{1}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A \right)$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A \right) = 3 +$$

$$6\sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\text{由 } 0 < A < \frac{2\pi}{3}, \text{ 可得 } \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1,$$



所以 $6 < a+b+c \leq 9$, 故 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(6, 9]$.

9. AD 【解析】由三角形的边长能构成三角形, 得 $1 < c < 5$.

又 $a < b$, 所以 $\triangle ABC$ 中为钝角的可能为角 B 或角 C .

则 $\cos B = \frac{4+c^2-9}{2 \times 2c} < 0$ 或 $\cos C = \frac{4+9-c^2}{2 \times 2 \times 3} < 0$, 所以 $4+c^2-9 < 0$ 或 $4+9-c^2 < 0$, 解得 $1 < c < \sqrt{5}$ 或 $\sqrt{13} < c < 5$.

所以选项 A, D 满足. 故选 AD.

10. $\frac{4}{5}$ 【解析】因为 O 为 $\triangle ABC$ 的内

心, 所以 $S_A : S_B : S_C = a : b : c$,

所以 $a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC} = \mathbf{0}$,

所以 $a\vec{AO} = b\vec{OB} + c\vec{OC} = b(\vec{AB} - \vec{AO}) + c(\vec{AC} - \vec{AO}) = b\vec{AB} + c\vec{AC} - (b+c)\vec{AO}$,

所以 $(a+b+c)\vec{AO} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$,

所以 $\vec{AO} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$.

又因为 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$,

所以 $x = \frac{b}{a+b+c}, y = \frac{c}{a+b+c}$,

所以 $x+y = \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{1}{\frac{a}{b+c} + 1}$.

因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = b^2 + c^2 - \frac{7}{4}bc = (b+c)^2 - \frac{15}{4}bc \geq (b+c)^2 - \frac{15}{4} \times$

$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(b+c)^2$, 当且仅当 $b=c$

时等号成立, 所以 $\frac{a^2}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{16}$, 所以

$\frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{4}$, 所以 $x+y \leq \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{4}{5}$, 当且

仅当 $b=c$ 时等号成立, 所以 $x+y$ 的最大值为 $\frac{4}{5}$.

9.2 正弦定理与余弦定理的应用

题型诀

1-1. B 【解析】由题意知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 180^\circ - 75^\circ + 15^\circ = 120^\circ$, $AB = 100$,



$$BC = 60,$$

根据余弦定理, 得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \angle ABC = 100^2 + 60^2 + 6\,000 = 19\,600$, 所以 $AC = 140$. 故选 B.

1-2. $100\sqrt{2}$ 【解析】 在 $\text{Rt} \triangle ACM$ 中, $\angle MAC = 60^\circ$, $AC = 100$, 所以 $AM =$

$$\frac{AC}{\cos 60^\circ} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200. \text{ 在 } \text{Rt} \triangle ABN \text{ 中,}$$

$$\angle NAB = 30^\circ, AB = 50\sqrt{6}, \text{ 所以 } AN = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{50\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 100\sqrt{2}. \text{ 在 } \triangle AMN \text{ 中,}$$

$\angle MAN = 45^\circ$, $AM = 200$, $AN = 100\sqrt{2}$, 由余弦定理, 得 $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos 45^\circ = 200^2 + 100^2 \times 2 - 2 \times 200 \times 100\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 100^2 \times 2$, 所以 $MN = 100\sqrt{2}$.

2-1. D 【解析】 如

图, 在 $\triangle BC_1D_1$ 中,

$\angle C_1BD_1 = \beta - \alpha$, 由

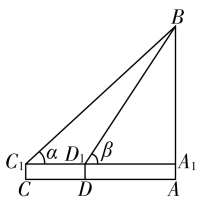
正弦定理可得

$$\frac{C_1D_1}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{BD_1}{\sin \alpha},$$

$$\text{所以 } BD_1 = \frac{C_1D_1 \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{l \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$\text{从而 } BA_1 = BD_1 \sin \beta = \frac{l \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$\text{故 } AB = BA_1 + AA_1 = \frac{l \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} + h, \text{ 故选 D.}$$



2-2. C 【解析】 设 $AB = m$ m, 则在

$$\text{Rt} \triangle ABC \text{ 中, } BC = \frac{m}{\tan 60^\circ} = \frac{m}{\sqrt{3}}. \text{ 在 } \triangle BCD$$

中, $\angle CBD = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$, 由正

弦定理得 $\frac{CD}{\sin 105^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$, 因为

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \text{ 代入数据, 解得 } m =$$

$$90 - 30\sqrt{3} \approx 90 - 30 \times 1.7 = 39, \text{ 故选 C.}$$

3-1. A 【解析】 因为 $\angle BAD = 15^\circ$,

$$\angle BED = 45^\circ,$$

所以 $\angle ABE = 30^\circ$.

在 $\triangle ABE$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AE}{\sin 30^\circ} =$

$$\frac{BE}{\sin 15^\circ},$$

$$\text{解得 } BE = 20(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$



在 $\triangle BED$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BE}{\sin \angle BDE} =$

$$\frac{BD}{\sin 45^\circ},$$

$$\text{所以 } \sin \angle BDE = \frac{20(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{20} =$$

$$\sqrt{3}-1.$$

又 $\angle ACD = 90^\circ$, 所以 $\sin \angle BDE = \sin(\angle DAC + 90^\circ)$,

所以 $\cos \angle DAC = \sqrt{3}-1$. 故选 A.

3-2. ABD 【解析】 对于 A 选项, 在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$, 因为 C 在 D 的正西方向, 所以 A 在 C 的北偏西 15° 方向, 故 A 正确.

对于 B 选项, 在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 105^\circ$, $\angle ADC = 30^\circ$, 则 $\angle CAD = 45^\circ$. 由正弦定理, 得 $AC = \frac{CD \sin \angle ADC}{\sin \angle CAD} = \sqrt{2}$, 故 B 正确.

对于 C 选项, 在 $\triangle BCD$ 中, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle CDB = \angle ADC + \angle ADB = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, 所以 $\angle CBD = 45^\circ$, 则 $BD = CD = 2$, 于是

$BC = 2\sqrt{2}$, 故 C 不正确. 对于 D 选项, 在

$\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB = 2 + 8 - 2 \times \sqrt{2} \times$

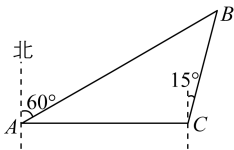
$$2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 6, \text{ 即 } AB = \sqrt{6}, \text{ 故 D 正确. 故}$$

选 ABD.

巩固练

1. B 【解析】 作出示意图如图所示,

$$AC = 15 \times 4 = 60 \text{ (km)}, \angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$



$$\angle ACB = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ,$$

则 $\angle ABC = 45^\circ$.

由正弦定理, 可得 $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$,

$$\text{则 } BC = \frac{60 \times \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 30\sqrt{2} \text{ (km)},$$

所以这时船与灯塔的距离为 $30\sqrt{2}$ km.

2. B 【解析】 连接 BD (图略), 在 $\triangle BCD$



中,由已知条件,知 $\angle DBC = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$, $\therefore \angle ABD = 120^\circ -$

$30^\circ = 90^\circ$. 在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理得

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C$, 可得

$$BD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \cos 120^\circ = 12, \therefore BD =$$

$$2\sqrt{3}, \therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times$$

$$4 \times 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ = 5\sqrt{3}.$$

3. **A** 【解析】在 $\triangle AMC$ 中, $\angle ACM = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$, $\angle AMC = 120^\circ$, 由正弦定理有

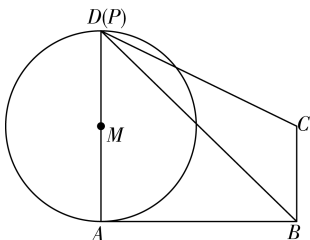
$$\frac{AM}{\sin \angle ACM} = \frac{AC}{\sin \angle AMC} \Rightarrow \frac{1200}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$AC = 600\sqrt{6}$ m, 在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中, $DC =$

$$AC \cdot \tan \angle DAC = 600\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$600\sqrt{2}$ m. 故选 A.

4. $120\sqrt{3} - 120$ 【解析】当乘坐舱 P 在摩天轮的最高点 D 时, 如图所示.



因为摩天轮的半径为 60, 所以 $AD = 120$, $AB = 120$,

所以 $DB = 120\sqrt{2}$, $\angle DBA = 45^\circ$, 所以 $\angle DBC = 45^\circ$.

而 $\angle CDB = \theta = 30^\circ$, 所以 $\angle DCB = 105^\circ$.

由正弦定理可知 $\frac{BC}{\sin \angle CDB} =$

$$\frac{DB}{\sin \angle DCB}, \text{ 所以 } BC = \frac{120\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} =$$

$$120\sqrt{3} - 120.$$

5. **C** 【解析】根据题意, 设 $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. 因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$,

$$\angle ABC = \frac{2\pi}{3}, BD = 4, \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot$$

$$BD \cdot \sin \angle ABD + \frac{1}{2} CB \cdot BD \cdot \sin \angle CBD,$$



即 $\frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}c + \sqrt{3}a$, 所以 $a+c = \frac{ac}{4}$, 因为根

据基本不等式有 $ac \leq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$, $a+c \geq$

$2\sqrt{ac}$, 所以 $a+c \geq 16$, $ac \geq 64$, 由余弦定理

得 $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle ABC} =$

$$\sqrt{a^2 + c^2 + ac} \geq \sqrt{2ac + ac} = \sqrt{3ac} \geq$$

$8\sqrt{3}$, 所以 $a+b+c \geq 16+8\sqrt{3}$, 当且仅当

$a=c=8$ 时等号成立. 所以 $\triangle ABC$ 周长的

最小值为 $16+8\sqrt{3}$. 故选 C.

6. D 【解析】由 $AB = a$, $\angle BAM = \alpha$,

$\angle ABM = \beta$, 在 $\triangle ABM$ 中, 利用正弦定

理可以求出 AM , BM 的长. 对于

① $\angle BNM$ 和 $\angle MBN$, 在 $\triangle BMN$ 中, 利用

正弦定理可得 $\frac{MN}{\sin \angle MBN} = \frac{BM}{\sin \angle BNM}$,

得 $MN = \frac{BM \sin \angle MBN}{\sin \angle BNM}$, 从而可求出

MN ; 对于② $\angle AMN$ 和 $\angle BNM$, 先求得

$\angle AMB = \pi - \alpha - \beta$, 所以 $\angle BMN =$

$\angle AMN - \angle AMB$, 然后在 $\triangle BMN$ 中, 利

用正弦定理可得 $\frac{MN}{\sin \angle MBN} =$

$\frac{BM}{\sin \angle BNM}$, 得 $MN = \frac{BM \sin \angle MBN}{\sin \angle BNM}$, 从

而可求出 MN ; 对于③ $\angle NAB$ 和

$\angle BNA$, 在 $\triangle ABN$ 中, 由正弦定理得

$\frac{BN}{\sin \angle NAB} = \frac{AB}{\sin \angle BNA}$, 可求得 $BN =$

$\frac{AB \sin \angle NAB}{\sin \angle BNA}$, 再在 $\triangle ABN$ 中利用三角

形的内角和定理可求出 $\angle ABN$, 从而可

求得 $\angle MBN = \angle ABN - \beta$, 再在 $\triangle BMN$

中, 利用余弦定理得

$$MN^2 = BN^2 + BM^2 - 2BM \cdot BN \cos \angle MBN,$$

从而可求出 MN , 所以三组数据均能求

出 MN , 故选 D.

7. 【解】(1) 在直角三角形 BCP 中,

$\tan \angle PBC = \frac{PC}{BC}$, 故 $BC = 2$. 在 $\triangle ABC$

中, $\angle BCA = 180^\circ - 15^\circ - 120^\circ = 45^\circ$, 由

正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA}$, 解

得 $AB = 2(\sqrt{3} + 1)$, 从 A 到 B 共花 20

分钟, 故巡逻船的航行速度为



$$6(\sqrt{3}+1) \text{ km/h.}$$

(2) 在 $\triangle BCD$ 中, $BC=2$, $BD=\sqrt{3}+1$,

$\angle DBC=60^\circ$, 由余弦定理可得 $CD=\sqrt{6}$,

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin \angle DBC} =$

$$\frac{CB}{\sin \angle CDB}, \text{ 则 } \sin \angle CDB = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 而 } CD >$$

CB , 则 $\angle CDB < \angle DBC$, 故 $\angle CDB =$

45° , 所以此时山底 C 位于 D 处的南

偏东 45° 方向.

8. 【解】(1) 在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理知

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD},$$

$$\text{所以 } \frac{BD}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin \frac{\pi}{4}}, \text{ 解得 } BD=6.$$

若选条件①,

$$\text{因为 } \angle BCD = \frac{2\pi}{3}, \angle CBD = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } \angle BDC = \frac{\pi}{12}, \text{ 所以 } \angle BDE = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{在 Rt } \triangle BDE \text{ 中, } BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = 10.$$

若选条件②, 在 $\triangle BDE$ 中, 由余弦定理

$$\text{知 } \cos \angle DBE = \frac{BD^2 + BE^2 - DE^2}{2BD \cdot BE},$$

$$\text{化简得 } 5BE^2 - 36BE - 140 = 0,$$

$$\text{解得 } BE=10 \text{ 或 } BE=-\frac{14}{5} \text{ (舍去).}$$

故服务通道 BE 的长度为 10 km.

(2) 在 $\triangle ABE$ 中, 由余弦定理知, $BE^2 =$

$$BA^2 + AE^2 - 2BA \cdot AE \cdot \cos \angle BAE,$$

$$\text{所以 } 100 = BA^2 + AE^2 + BA \cdot AE,$$

$$\text{所以 } (BA + AE)^2 - BA \cdot AE = 100, \text{ 即}$$

$$(BA + AE)^2 - 100 = BA \cdot AE \leq$$

$$\frac{(BA + AE)^2}{4}, \text{ 当且仅当 } BA = AE \text{ 时, 等号}$$

$$\text{成立, 此时 } \frac{3}{4}(BA + AE)^2 = 100, \text{ 即 } BA +$$

$$AE \text{ 的最大值为 } \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ km.}$$

9.3 数学探究活动: 得到不可达两点之间的距离(略)